Jean Sousselier 02/03/23

Contribution à l'étude de « La conjecture de Syracuse »

1. **Enoncé de la conjecture** (Wikipedia)

En mathématiques, on appelle **suite de Syracuse** une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur.

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2… C'est ce qu'on appelle la suite de Syracuse du nombre 14.

Après que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs (1,4,2,1,4,2…) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

La **conjecture de Syracuse**, encore appelée **conjecture de Collatz**, **conjecture d'Ulam**, **conjecture tchèque** ou **problème 3*x* + 1**, est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens. Paul Erdős a dit à propos de la conjecture de Syracuse : les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes[1].

2. Bribes et carrefours.

Soit un nombre x . Dans toute suite de Syracuse où il apparait, il n'a par définition qu'un seul successeur : x/2 si x est pair, (3 x +1) si x est impair.

Combien peut-il avoir de prédécesseurs ?

- Un seul s'il est impair, à savoir 2x
- Un ou deux s'il est pair, à savoir d'une part 2x, d'autre part éventuellement un nombre y tel que x = 3y + 1 . Mais pour cela il faut que y soit impair , soit 2n + 1, et donc x = 3(2n+1) + 1, soit x= 6n + 4

En conclusion seuls les nombres de la forme 6n + 4 peuvent avoir 2 prédécesseurs, appelons les « **carrefours** ». Ils forment une **congruence** : tous les carrefours sont congrus à 4 modulo 6.

Appelons « **bribe** » une séquence de nombres d'une suite de Syracuse compris entre un carrefour (inclus dans la bribe) et le carrefour suivant.

Une bribe est donc définie par un nombre (6n+4) et tous ses successeurs, jusqu'à ce qu'on tombe sur un autre carrefour.

Chaque nombre autre que (6n+4) n'appartient qu'à une seule bribe (sauf les cas des multiples de 6, voir plus loin « pseudo-bribes »).

Tout nombre impair a pour successeur un carrefour, et pour prédécesseur un nombre pair.

Toute suite de Syracuse est une succession de bribes (ou pseudo-bribes) .

Chaque bribe (sauf terminale) est suivie d'une autre bribe.

Exemples de suites de Syracuse avec mise en évidence des bribes (les carrefours sont en jaune) :

3	10	5	16	8	4	2	1													
4	2	1																		
5	16	8	4	2	1															
6	3	10	5	16	8	4	2	1												
7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1				
8	4	2	1																	
9	28	14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1	
10	5	16	8	4	2	1														
11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1						

Le nombre 26 par exemple, ne peut jamais apparaître que dans la bribe (52, 26, 13)

Liste des premières bribes (la première colonne donne les valeurs successives de (6n+4)

4	2	1	4
10	5	16	
16	8	4	
22	11	34	
28	14	7	22
34	17	52	
40	20	10	
46	23	70	
52	26	13	40
58	29	88	
64	32	16	
70	35	106	

La première question à se poser est celle-ci : étant donné un nombre x, peut-on affirmer que dans la suite de Syracuse partant de ce nombre, on tombe forcément sur un carrefour ? Si ce n'était pas le cas, alors la conjecture de Syracuse serait fausse (on ne peut arriver à la valeur 1 qu'en passant par le carrefour 4).

Or cela est évident ; il suffit de tomber sur un nombre impair (puisque tout nombre impair a pour successeur un carrefour). Si on a une suite de nombre pairs, on tombe forcément sur un nombre impair dans la suite de Syracuse avec la division par 2 (ou la valeur 1).

Carrefours (a) et suivants S(a)

a	S(a)
4	4
10	16
16	4
22	34
28	22
34	52
40	10
46	70
52	40
58	88
64	16
70	106
76	58
82	124
88	22
94	142
100	76
106	160
112	28
118	178
124	94
130	196
136	34
142	214
148	112
154	232
160	40

les couleurs correspondent aux 3 cas suivants

$a = 4 + 6(2n+1)$ $S(a) > a$

$a = 4+6.2.2n$ $S(a) < a$

$a = 4 + 6.2(2n+1)$ $S(a) <a$

On pourrait compléter cette liste avec les **ascendants** : chaque carrefour ayant exactement 2 ascendants, dont l'un est forcément son quadruple, (car 4 (4+6N) =4 +12 +24N est un carrefour) de couleur jaune.

La liste ci-dessus représente le début de la **liste complète des bribes**, définies par leur carrefour initial et leur carrefour final.

3. Composition des bribes.

Une bribe est définie par un carrefour A, suivi d'un ou plusieurs nombres jusqu'au carrefour suivant B : A x y … B

Démontrons qu'on ne peut avoir en fait que les configurations suivantes (en désignant par P un nombre pair et par I un nombre impair) :

1. A P B
2. A I B
3. A P I B

En effet, si le nombre précédant B est pair : B = 4 + 6n → P = 8 + 12n → ce nombre n'est pas un carrefour → le nombre précédant P est 16 +24n = 4 + 6x , c'est un carrefour, cas 1.

Si le nombre précédent B est impair le double de I =1+2n peut être :

2+4n = 6x, ou 6x + 2, ou 6x + 4

- 6x + 4 : c'est un carrefour, on est donc dans le cas 2. A I B
- 6x + 2 : le nombre précédent est 12x +4 qui est un carrefour, on est donc dans le cas 3. A P I B
- 6x : dont le nombre précédent est 12x, dont le nombre précédent est 24x et ainsi de suite : dans ce cas on n'atteint jamais un carrefour, on peut prolonger cette suite à l'infini.
  Ce cas se produit avec tous les multiples de 6.

Si on considère la suite (12 - 6 - 3 - 10), on ne peut trouver la bribe (A …. 12 – 6 – 3), puisque le carrefour A n'existe pas, on n'obtient qu'une suite infinie de multiples de 6.

En conclusion, les bribes n'appartiennent qu'aux cas 1 à 3 :

1)	**A P B**	B = A/4	B < A	A = 4 B
2)	**A I B**	B = 3 A/2 + 1	B > A	A = 2 / 3 (B – 1)
3)	**A P I B**	B = 3 A/4 + 1	B < A	A = 4 / 3 (B – 1)

Remarque 1 :

Il y a une bribe particulière : celle ayant pour origine le carrefour 4 . C'est la bribe 4 – 2 – 1 – 4 . Nous l'appellerons bribe terminale. On constate aisément que c'est la seule pour laquelle on a A = B

Remarque 2 :

Tout nombre autre que (6n+4) appartient à une bribe et une seule, avec le cas particulier des **multiples de 6, qui appartiennent à une pseudo-bribe infinie** comme par exemple (…… 72 – 36 – 18 – 9 – 28) : les multiples de 6 ne sont pas des carrefours, et on ne trouve pas de carrefours dans leurs ascendants.

Une telle bribe infinie se termine forcément par un impair multiple de 3, et inversement tout multiple de 3 a pour ascendant un multiple de 6 et donc appartient à une bribe infinie. Donc les vraies bribes, partant d'un carrefour A et aboutissant à un carrefour B **ne contiennent aucun multiple de 3.**

Donc, les nombres constituant une bribe (hors les extrémités) sont de la forme

6n + 1, ou **6n + 2**, ou **6n + 5.**

Remarque 3 :

Etudions le contenu des bribes selon qu'elles renferment **6n + 1**, **6n + 2**, ou **6n + 5.**

Avec 6n+1, on a la suite suivante, en calculant son successeur et ses prédécesseurs :

(b1) : 24n+4 → 12n+2 → 6n+1 → 18n+4 de la forme **A P I B**

Avec 6n+5 , on a la suite :

(b5) : 6(2n+1)+4 → 6n+5 → 6(3n+2)+4 de la forme **A I B**

Avec 6n+2, il faut distinguer les cas où n = 2p ou n=2p+1 , conduisant à :

(b2) : 12n+4 → 6(2p+1)+2 → 6p+4 de la forme **A P B**

12n+4 → 12p+2 → 6p+1 → 18p+4

Ce dernier cas est le même que le premier cas, il n'y a donc que 3 formes de bribes, (b1), (b2), et (b5).
Les cas (b1) et (b2) conduisent à une diminution (B<A), et le cas **(b5)** conduit à une augmentation (B = 3 A/2 + 1).
On peut dire également que **pour qu'une bribe partant de 6n+4 progresse (B>A), il faut et il suffit que n soit impair.**

Enfin, en utilisant la notation binaire des nombres, l'origine A s'écrit :

- dans le cas (b1) : A=……..100 → **A P I B** correspond à la couleur bleue
- dans le cas (b2) : A=……..000 → **A P B** correspond à la couleur jaune
- dans le cas (b5) : A=……… 10 → **A I B** correspond à la couleur rouge

Remarque 4 :

La liste des bribes définit également **l'ensemble des suites de Syracuse** : étant donné un nombre n quelconque, il suffit de trouver le carrefour C1 qui suit n (c'est 3n+1 si n est impair, si n est pair il suffit de le diviser C par 2 jusqu'à ce qu'on trouve un impair). Le carrefour C2 est le suivant de C1 dans cette liste, le carrefour C3 est le suivant de C2 et ainsi de suite.

Conformément à ce qui précède, **une suite de Syracuse ne contient aucun multiple de 3**, sauf le cas échéant sa valeur initiale, et ses successeurs immédiats (36 - 18 – 9 – 28).

Les possibilités d'une suite de Syracuse sont les suivantes :

- Convergence vers 1
- Boucles, ou cycles (on retombe sur un carrefour Cx qu'on a déjà rencontré)
- Divergence : la valeur de Cx tend vers l'infini. :

Remarque 5 probabiliste :

Pour aller du carrefour A au carrefour B, on a donc 3 possibilités

1. A P B
2. A I B
3. A P I B

Le tableau ci-dessous donne les probabilités d'occurrence pour ces 3 probabilités, ainsi que la valeur de B obtenue :

Cas	Composition	Probabilité	Valeur de B
1	A P B	0.25	A/4
2	A I B	0.5	3A/2+1
3	A P I B	0.25	3A/4+1

Les probabilités sont bien celles indiquées : en effet A=4 + 6n , donc A/2 = 2 + 3n qui est pair ou impair en même temps que n, donc la probabilité du cas 2 (A I ..) est 0.5, et celle des cas 1 ou 3 (A P ..) est de 0.5.

Pour ces cas 1 ou 3, on a n =2m, A/2 = 2 +6m, A/4= 1 +3m, qui est pair ou impair à l'opposé de m, d'où les probabilités de 0.25 pour les cas 1 et 3.

Finalement, la valeur probable de B est égale à A multiplié par un coefficient ω,

avec ω=0.25 dans le cas 1, ω =1.5 +ε dans le cas 2, et ω =0.75 +ε dans le cas 3, et donc la valeur probabiliste de ω est (en négligeant les ε) :

ω = 0.25^0.25 x 1.5^0.5 x 0.75^0.25

= 0,70710 x 1,224744 x 0,930604 = 0,80592

On observe donc une décroissance rapide des valeurs successives des carrefours. Cela ne prouve pas la convergence des suites, mais c'est un encouragement à la recherche de sa démonstration !

Résumé :

Pour une bribe A-B, avec $A = 6n_A + 4$ et $B = 6n_B + 4$, on a les 3 cas suivants

Cas-couleur	A en binaire	n_A	Bribe	B	n_B
b1 …….	……..100	4p	**A P I B**	3 A/4 + 1	$3\,n_A/4 = 3p$
b2 …….	……..000	2(2p+1)	**A P B**	A/4	$(n_A - 2)/4 = p$
b5 …….	……… 10	2p+1	**A I B**	3 A/2 + 1	$(3n_A + 1)/2 = 3p+2$

Etude des ascendants d'un carrefour.

Un carrefour B a 2 ascendants, il est le terminal de 2 bribes de type b1, b2 ou b5. Or, le nombre 4B est évidemment un ces 2 ascendants, donc les 2 bribes arrivant en B sont (b1 et b2), ou (b2 et b5)

Examinons le cas (b1, b2) , correspondant aux bribes A1 - B et A2 – B

D'après le tableau ci-dessus, on a B = A2/4 et B = 3A1/4 +1

D'où **A2 = 3A1 +4**

Dans le cas (b5, b2) , correspondant aux bribes A5 - B et A2 - B

on a B = A2/4 et B = 3A5/2 +1

D'où **A2 = 6A5 +4**

4. Graphe des carrefours (6n+4)

A part le cas particulier de la bribe (4 -2 -1 -4) qui forme une boucle, il faut démontrer qu'il n'y a pas d'autres boucles possibles, et qu'il n'y a pas de divergence des suites de Syracuse.

Etudier de telles suites revient à étudier la suite des bribes, c'est-à-dire les cheminements de carrefour en carrefour.

Considérons le **graphe orienté** dont les sommets sont les carrefours et dont les arcs sont définis ainsi : il y a un arc de A vers B si B est le successeur de A, c'est-à-dire s'il y a une bribe (A…B).

C'est un graphe orienté très particulier, car **chaque sommet a un descendant et deux ascendants, sauf les sommets origine d'une pseudo-bribe, qui n'ont qu'un ascendant.**

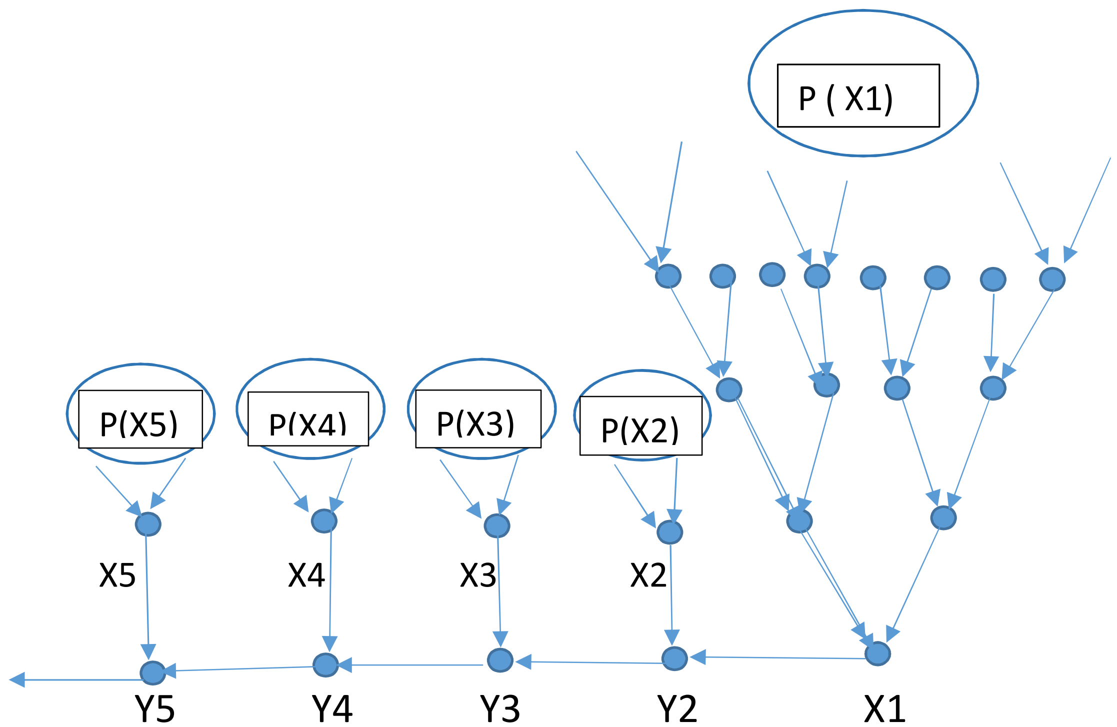
Tous les nombres d'une pseudo-bribe (sauf le carrefour origine de cette pseudo-bribe) sont des multiples de 3, et réciproquement tout multiple de 3 appartient à une pseudo-bribe.

Etant donné un sous-ensemble S de carrefours, on appelle **parentèle** de S l'ensemble des carrefours qui ont parmi leurs descendants un sommet de S. La parentèle P de S comprend tous les sommets de S, tous leurs ascendants directs, tous les ascendants de leurs ascendants et ainsi de suite. Il s'agit d'un **ensemble infini** : en effet s'il n'y avait qu'un nombre fini X de sommets dans la parentèle P de S, comme ces sommets n'ont qu'un descendant, les X sommets auraient au maximum X ascendants, donc il y aurait au moins X sommets extérieurs à P ayant pour descendants un sommet de S, donc ils feraient partie de P, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

Regardons ce qui se passe quand S se réduit à un seul carrefour.

Ascendants et descendants d’un carrefour X1

Considérons le sous-graphe constitué de tous les ascendants et ascendants d’un carrefour X1



Les ascendants de X1 forment sa parentèle P(X1)

Soit Y2 le descendant de X1, Y3 le descendant de Y2 etc.
Soit X2 l’autre ascendant de Y2, X3 l’autre ascendant de Y3 etc.

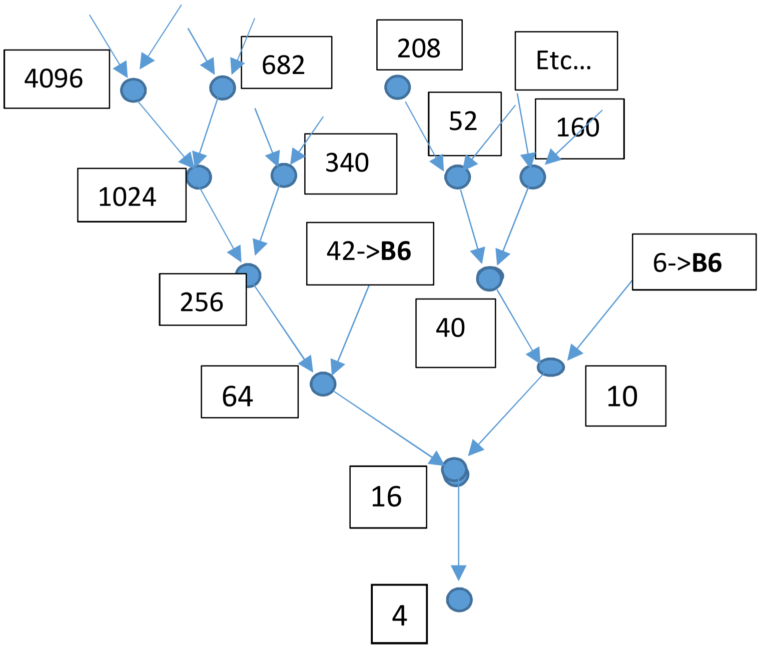
P(X2) est la parentèle de X2

P(X5) est la parentèle de X5 etc

Etudions les différentes possibilités d’évolution de ce sous-graphe contenant l’ensemble des ascendants et descendants de X1. Elles dépendent de la suite Y2 – Y3 -…-Yn

- Ou bien elle converge, c’est-à-dire que Yn = 4 Nous obtenons la **famille 1**
- Ou bien elle diverge, Yn augment indéfiniment sans jamais être égal à une valeur précédente du sous-graphe : c’est la **famille 2**
- Ou bien elle boucle, c’est-à-dire que Yn est égal à un des Y précédents, ou un des X précédents, ou un sommet de leurs parentèles : c’est la **famille 3**

La famille 1 se termine par Yk – 16 – 4 . Donc la famille 1 est constitué de la parentèle de 4 .



B6 : Pseudo-Bribe multiples de 6
En l'occurrence les suites
6-12-24-48…
et 42-84-128-…

Les pseudo-bribes ne font pas partie du graphe des carrefours.

Les nombres tels que 10 et 64 n'ont qu'un seul ascendant.

La famille 2 qui diverge (si elle existe) ne contient par définition aucune boucle, Toutes les parentèles P(Xj) sont étrangères les unes aux autres (elles ne contiennent aucun sommet d'une autre parentèle). Les sommets de cette famille 2 ne font pas partie de la parentèle de 4.

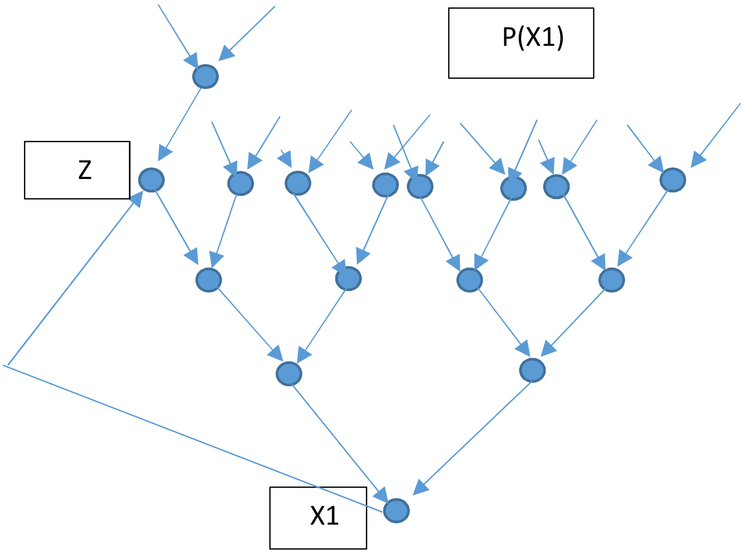
La famille 3 se termine par une boucle (si elle existe), donc Yn se retrouve dans une des parentèles Xj, ou bien dans un autre Yk (sans que cela soit déjà arrivé avec Yj, j<n).

Examinons d'abord le cas où Yn = Yk (k<n). Mais dans ce cas, ses ascendants Xn et Yn-1 sont les mêmes que les ascendants de Yk soit Xk et Yk-1, donc on aurait Yn-1 = Yk-1 ou Yn-1 = Xk, donc Yn ne serait pas le premier à se répéter. Ce cas est donc impossible.

Si maintenant Yn est égal à Xj (j<n) ou à un des sommets de P(Xj), alors son ascendant Yn-1 se retrouve dans P(Xj) donc Yn ne serait pas le premier à avoir cette caractéristique.

Finalement la seule possibilité de boucle est celle-ci : Y1 fait partie de P(X1), donc X1 a pour descendant l'un de ses ascendants.

- **Famille 3** : le successeur de X1 est Z, qui fait partie de P(X1)



Les sommets de P(X1) sont bien entendu absents de la famille 1.

Finalement :

- Si la parentèle de 4 inclut tous les carrefours, c'est-à-dire toutes les valeurs 4+6N, alors la conjecture de Syracuse est vérifiée
- Sinon, la conjecture est fausse.

On pouvait dire aussi plus simplement :

- Si le graphe des carrefours n'est constitué que d'une seule composante connexe, la conjecture de Syracuse est vérifiée.
- S'il comprend plusieurs composantes connexes, elle est fausse.

Remarques :

Reprenons les 3 bribes possibles et étudions la congruence modulo 3 des nombres qui la composent :

- Bribe A P B :

P est de la forme 3n+2
A et B sont de la forme 6n+4, donc ne sont pas multiples de 3 (évident), ni de la forme 3p+2, car on aurait 6n+4=3p+2, soit 6n+2=3p (impossible) donc **6n+4=3p+1**, soit p=2n+1

- Bribe A I B : idem que le précédent donc de la forme (3p+1), (3n+2), (3q+1)
- Bribe A P I B : de la forme : (3p+1), (3n+2), (?), (3q+1)

Or on a I=P/2, donc P=3n+2 = 3(2s) +2, donc I =3s+1

Les 3 formes de bribes sont donc :

Bribes	Sommet 1	Sommet 2	Sommet 3	Sommet 4
A P B	3p+1	3n+2	3q+1	
A I B	3p+1	3n+2	3q+1	
A P I B	3p+1	3n+2	3s+1	3q+1

On peut constater qu'aucun multiple de 3 n'est présent dans une bribe, ils figurent tous dans les pseudo-bribes infinies, ce que l'on savait déjà : **la suite de Syracuse de tout nombre N ne comprend aucun multiple de 3, sauf peut-être si N est multiple de 3**.

On constate aussi qu'il y a une surreprésentation des nombres congrus à 1 (modulo 3) par rapport aux nombres congrus à 2, ce qui est étrange : **dans la suite de Syracuse de tout nombre N, il y a plus de nombres congrus à 1 (modulo 3) que de nombre congrus à 2.**

Reprenons sous une autre forme le tableau ci-dessus, selon les valeurs de n, le premier sommet valant 6n+4 :

Bribes : n initial	**A P B :** n=2(2p+1)	**A I B :** n=2p+1	**A P I B :** n=4p
Sommet 1	---- 12(2p+1)+4	---- 6(2p+1)+4	---- 24p+4
Sommet 2	---- 6(2p+1)+2	---- 6p+5	---- 12p+2
Sommet 3	---- 6p+4	---- 6(3p+2)+4	---- 6p+1
Sommet 4			---- 18p+4
n du sommet final	n = p	n = 3p+2	n = 3p

- Avec les couleurs

Couleur	Sommet de la forme
....	6a+4
....	6a+2
....	6a+5
....	6a+1

Tous les nombres écrits sous la forme 6a+b ont ainsi leur place précise dans les bribes, sachant qu'il manque dans ce tableau les nombres de la forme 6a et 6a+3 : les nombres 6a sont les sommets des pseudo-bribes infinies, aboutissant au nombre impair 3(2a+1) = 6a+3

5. Graphe N

Le graphe orienté N est obtenu par une duplication du graphe (6n+4), mais avec une signification différente des sommets et des liaisons
Graphe (6n+4) : les sommets sont les nombres (6n+4), 2 sommets étant reliés s'ils sont 2 carrefours extrémités d'une bribe.
Graphe N : les sommets sont les nombres (n), le successeur de n est donné par l'application S(n) définie dans l'ensemble N des entiers naturels de la façon suivante.

(a)	si n=4p	S(4p) = 3p
(b)	si n=2(2p+1)	S(2(2p+1)) =p
(c)	si n=2p+1	S(2p+1)= 3p+2

On est assuré que chaque entier naturel a un seul successeur S(n) et au maximum deux prédécesseurs a et b , tels que S(a) = S(b) = n
Plus précisément, tout nombre (x) a comme prédécesseur(s) (y) :

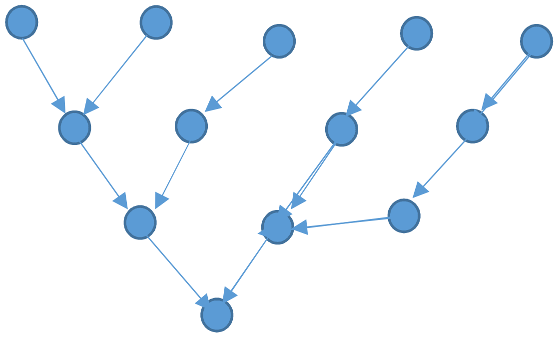
(b)	y=2(2x+1)	dans tous les cas
(a)	y=4p	si x est de la forme 3p
(c)	y=2p+1	si x est de la forme 3p+2

On note que les nombres x de la forme 3p+1 n'ont qu'un prédécesseur : 2(2(3p+1)+1, soit 12p+ 5, ou encore 3(4p+1) +2.
Ils correspondent dans le graphe (3n+2) aux sommets successeurs d'un carrefour (6n+4) extrémité d'une pseudo-bribe infinie, tels que 5 (successeur de 10) ou 32 (successeur de 64).
Exemple : soit une suite de Syracuse, les sommets (6n+4), (3n+2), et N.

Syracuse	28	14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4
6n+4	28			22		34		52			40		10		16		4
3n+2		14			11		17		26			20		5		8	
N		4			3		5		8			6		1		2	

Prédécesseurs dans N :

N	4	3	5	8	6	1	2
Prédécesseur 1	18	4	3	5	8	6	1
Prédécesseur 2	-	14	22	34	26	-	10



7. Etude des descendants.

Etudions le descendant du carrefour $X= 4+6N$, en fonction des valeurs de N

Tout N peut s'écrire $N = 2^q (2p+1)$

Avec q = 0,1,2,…

Et p = 0,1,2,…

Si $q=0$, on sait, d'après la remarque 3 du paragraphe 3, que le descendant de X est plus grand que X. En effet, $X = 4 + 6 (2p+1)$, le successeur de X est $2+3 (2p+1) = 6p+5$, dont le successeur (qui est donc le descendant de X) est $18p +16$, soit le carrefour $4+6(3p+2)$, soit

$B = 3 A/2 + 1$

Si $q>0$, et q pair , on a $B = A/4$

Si $q>0$ et impair , on a $B = 3 A/4 + 1$

(à suivre)